SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA

B. FRANCHI

# DISUGUAGLIANZA DI HARNACK PER OPERATORI ELLITTICI DEGENERI: UNA CONDIZIONE GEOMETRICA

Bologna, 22 MARZO 1984

1. Consideriamo un operatore ellittico del secondo ordine in forma di divergenza $L = \sum_{i,j=1}^{n} \partial_i (a_{ij} \partial_j)$, dove $a_{ij} = a_{ij} \in L^\infty (\Omega)$, $\Omega$ essendo un aperto di $R^n$. E' ben noto ([12]), allora, il seguente risultato (diseguaglianza di Harnack):

*Supponiamo $\Omega$ connesso e sia $u \in W^{1,2}_{loc} (\Omega)$, $u \geq 0$ soluzione debole di $Lu = 0$; allora per ogni compatto $K \subseteq \Omega$, esiste $C_K > 0$ (indipendente da u) tale che*

(1.a) $$\sup_K u \leq C_K \inf_K u.$$

Supponiamo ora che la forma quadratica associata a L possa degenerare in $\Omega$; supponiamo cioè che $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\, \xi_i\, \xi_j \geq 0 \ \forall \ (x,\xi) \in \Omega \times R^n$. Ci si chiede se possa sussistere una diseguaglianza analoga a (1.a) per le soluzioni deboli (convenientemente definite).

Il problema è stato considerato da numerosi autori: si vedano, ad esempio, [10], [14], [9], [2], [3] e [1] per un operatore a coefficienti $C^\infty$ che soddisfi la condizione di ipoellitticità di Hörmander. Tuttavia, nei risultati contenuti nel primo gruppo di lavori, viene richiesta qualche forma di sommabilità sull'inverso del più piccolo autovalore della matrice $A(x) = (a_{ij}(x))_{i,j = 1,\dots,n}$; ciò esclude operatori per i quali il più piccolo autovalore è fortemente degenere o, addirittura, nullo identicamente.

In questo seminario presenterò alcuni risultati ottenuti in collaborazione con E. Lanconelli ([5] e [7]): una condizione di tipo "geometrico" sull'operatore che permetta di provare (1.a) per una classe d'operatori ellittici degeneri che contiene, in particolare, operatori a coefficienti non regolari per i quali il più piccolo autovalore della for

ma quadratica è identicamente nullo. Premettiamo alcune considerazioni che servono a giustificare e a illustrare questo metodo.

Il primo punto consiste nell'osservare che, grazie a un risultato di Bombieri-Moser ([13]), la disuguaglianza di Harnack per l'operatore L è conseguenza delle due diseguaglianze seguenti:

(1.b) $\exists\, p > 2$ tale che, $\forall\, z_0 \in \Omega$, esistono un intorno V di $z_0$ e una costante $C = C(V,p) > 0$ tali che

$$\|u; L^p(V)\| \le C\left(\int_\Omega (\langle A(x)\,\nabla u(x), \nabla u(x)\rangle + |u(x)|^2)\right)^{1/2}$$

$\forall\, u \in C_0^1(\Omega)$;

(1.c) sia $\bar{x} \in \Omega$ un punto fissato. Esistono allora

$\rho_1 > 0$, $\rho_0 > 0$ $(\rho_0 \ge \rho_1)$, $C > 0$ tali che

$$\left(\int_{B(\bar{x},\rho)} |u - u_\rho|\,dx\right)^2 \le C \int_{B(\bar{x},\rho_0)} \langle A(x)\nabla u(x), \nabla u(x)\rangle\, dx$$

$\forall\, u \in C^1(\Omega)$, $\forall\, \rho \le \rho_1$, dove $u_\rho =$

$$= \mu(B(\bar{x},\rho))^{-1} \int_{B(\bar{x},\rho)} u\, dx$$ ($B(x,\delta)$ è la sfera di contro $\bar{x}$ e raggio $\delta > 0$ e $\mu$ la misura di Lebesgue).

La diseguaglianza (1.b) è, essenzialmente, una immersione locale dello "spazio delle soluzioni deboli" in un conveniente $L^p$, con $p > 2$, analoga al classico teorema di Sobolev per il caso ellittico. La diseguaglianza (1.c) è, invece, una diseguaglianza di Poincaré "grezza"; grezza in quanto non si dà una dipendenza di $\rho_0$ e C da $\rho$ (nel caso ellittico $\rho_0 = c_1\rho$ e $C = c_2\rho^{2+n}$). Osserviamo inoltre che è impreciso parlare di "spazio delle soluzioni deboli" per la scarsa regolarità della matrice A;

è possibile comunque dare una formulazione corretta nel caso generale.

Osserviamo infine che il passaggio da (1.b) e (1.c) alla diseguaglianza di Harnack non è immediato, ma richiede un adattamento della tecnica iterativa di Moser al caso degenere ([11]), oltre al vero e proprio lemma di Bombieri-Moser (v. appendice A); più precisamente, si tratta di sostituire la norma del gradiente ordinario con la norma del gradiente degenere $< A(x)\, \nabla u(x), \nabla u(x) >^{1/2}$.

Ora, supponiamo per un momento che la matrice A sia sufficientemente regolare (sia, ad esempio, $C^1$); è possibile allora associare alla matrice A una metrica in modo naturale (ciò è stato illustrato in [6]): dati $x,y \in \Omega$ possiamo definire distanza $d(x,y)$ il tempo minimo necessario per andare da x a y lungo una curva $\gamma$ sub-unitaria nel senso di [4], tale cioè che $\forall \xi \in R^n$ $< \dot{\gamma}(t), \xi >^2 \leq < A(\gamma(t))\xi,\xi > \ \forall t$ (altre definizioni equivalenti sono esposte in [6]). Se L è ellittico, allora d è equivalente a una metrica riemanniana. Nel caso generale, sotto ipotesi molto naturali, si è visto in [6] che la metrica d può essere considerata come una metrica riemanniana singolare; si potrebbe dunque pensare di utilizzare questa analogia per dimostrare le disuguaglianze (1.b) e (1.c) utilizzando delle "coordinate geodetiche". Purtroppo, le "geodetiche" della metrica d hanno un comportamento per vari aspetti "patologico": infatti, anche nei casi più regolari, viene a mancare l'iniettività ([6]) e la regolarità ([8]). L'idea fondamentale del nostro lavoro (che è formalizzata nella definizione di struttura sub-riemanniana data più avanti) è quella di sostituire le geodetiche con delle famiglie abbastanza ricche di curve "subgeodetiche", di curve cioè che sono sub-unitarie rispetto all'operatore.

2. Sia $\alpha > 0$ e $\forall x \in \Omega$ sia $B(x)$ una matrice reale simmetrica $n \times n$ tale che $< B(x)\xi, \xi > \geq 0$ $\forall (x, \xi) \in \Omega \times R^n$; diremo che B definisce una struttura $\alpha$-sub-riemanniana su $\Omega$ se $\forall z_0 \in \Omega$ esiste un intorno V di $z_0$, un vettore $y_0 \in R^n$, $\bar{r}$, C, $t_0 \in R_+$ e una applicazione di classe $C^1$ $(t,y,z) \to x(t,y,z)$ da $[0,t_0] \times B(y_0, \bar{r}) \times V$ a $\Omega$ tali che:

(2.a) $\forall z \in V, \forall y \in B(y_0,\bar{r})$ *la curva* $t \to x(t,y,z)$ *è sub-unitaria rispetto a* B (*cioè* $< \frac{\partial x}{\partial t}(t,y,z), \xi >^2 \leq < B(x(t,y,z))\xi, \xi >$ $\forall \xi \in R^n$, $\forall t \in [0,t_0]$) *e* $x(o,y,z) = z_0$;

(2.b) $\forall z \in V$, $\forall t \in ]0,t_0]$, *l'applicazione* $y \to x(t,y,z)$ *è iniettiva in* $B(y_0, \bar{r})$;

(2.c) $\forall z \in V$, $\forall y \in B(y_0, \bar{r})$, $\forall t \in ]0,t_0]$,

$$\left|\det \frac{\partial x}{\partial y} (t,y,z)\right| \geq Ct^{\alpha}.$$

Per comprendere meglio la ragione della definizione data, supponiamo che B sia strettamente positiva e dipenda da x in modo abbastanza regolare; in questo caso la metrica $< B(x)^{-1}\xi, \xi >$ definisce una struttura riemanniana su $\Omega$. E' allora facile vedere che, se $\exp_z$ è l'applicazione esponenziale usuale nel punto z, la famiglia di curve geodetiche $t \to \exp_z(ty) = x(t,y,z)$ soddisfa (2.a), (2.b) e (2.c). Infatti la curva $t \to x(t,y,z)$ è sub-unitaria in quanto proiezione su $\Omega$ della soluzione del sistema hamiltoniano associato a $H(x,p) = \frac{1}{4} < B(x)p, p >$ con dati di Cauchy $x(0) = z$, $p(0) = 2(B(z))^{-1}y$. Qui $\alpha = n$.

Osserviamo inoltre che, se B è una matrice $n \times p$ limitata e continua e $\phi: [0,T] \to R^p$ è una funzione continua tale che $|\phi| \leq 1$, allora ogni curva integrale del sistema $\dot{x} = B(x)\phi(t)$ è sub-unitaria per la

matrice $B^tB$, poiché $\forall \xi \in R^n$, $< \dot{x}(t), \xi >^2 = < B(x(t))\phi(t), \xi >^2 \leq$ $\leq |\phi(t)|^2 \; |{}^tB(x(t)) \; \xi|^2 \leq < (B^tB)(x(t)) \; \xi, \xi >$. Se poi $n = p$ e se $\sup|\phi|$ è abbastanza piccolo, $x(\cdot)$ è anche sub-unitaria per B. In particolare, se B è abbastanza regolare, ogni soluzione del sistema hamiltoniano $\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial \xi}$, $\dot{\xi} = - \frac{\partial H}{\partial x}$, dove $H(x,\xi) = < B(x)^tB(x)\xi, \xi >$ (oppure $H(x,\xi) = < B(x)\xi, \xi >$ se $n = p$) è sub-unitaria rispetto a $B^tB$ (rispetto a B) se $|\xi(0)|$ è abbastanza piccolo.

Definiamo ora la classe di operatori differenziali per la quale vengono provate (1.b) e (1.c). Sia

$$L = \sum_{i,j=1}^{n} \partial_i (a_{ij} \; \partial_j)$$

un operatore differenziale del secondo ordine in forma di divergenza, dove $a_{ij} = a_{ji} \in L^\infty \; \forall \; i,j = 1,\dots,n$. Supporremo che

(2.d) *esiste una matrice continua* $B = {}^tB \geq 0$ *tale che,* $\forall$ $x \in \Omega, B(x) \leq A(x)$ *e che definisce una struttura* $\alpha$*-sub-riemanniana su* $\Omega$ *per un* $\alpha > 0$ *conveniente.*

(Potremmo anche considerare termini di ordine inferiore nell'operatore, potremmo cioè raggiungere un termine $\sum_{j=1}^{n} b_j \; \partial_j$, dove $b = (b_1,\dots,b_n)$ è tale che esiste $\theta > 0$, tale che $\theta b(x)$ è sub-unitario rispetto ad $A(x)$ q.d. in $\Omega$).

Osserviamo esplicitamente che la forma di L e l'ipotesi (2.d) sono invarianti per cambiamenti di variabili $C^1$. Infatti, se $\phi: \Omega \to \Omega'$ è un diffeomorfismo di classe $C^1$ tale che $0 < c_1 \leq \left|\det \frac{\partial \phi}{\partial x}\right| \leq c_2$ e $x(t,y,z)$ è una famiglia di applicazioni che verifica (2.a), (2.b) e (2.c) relati-

vamente alla matrice B, la famiglia $\tilde{x}(t,y,\phi(z)) = \phi(x(t,y,z))$ verifica le stesse proprietà rispetto a $(\frac{\partial\phi}{\partial x})B^t(\frac{\partial\phi}{\partial x})$ $(\phi^{-1}(y))$.

Mostriamo qualche esempio di operatore che soffisfa (2.d)

Esempio 2.1. Se L è strettamente ellittico, allora esiste $\lambda > 0$ tale che $\lambda^2|\xi|^2 \leq \sum_{i,j} a_{ij}(x)\, \xi_i\, \xi_j$ q.d. in $\Omega$ $\forall\ \xi \in R^n$. Basta allora scegliere $B = \lambda^2 I$ e $x(t,y,z) = z + \lambda ty$, con $|y| \leqq 1$ (qui $\alpha = n$).

Osservazione 2.2. Supponiamo che la forma quadratica associata a L verifichi la diseguaglianza

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^2(x)\xi_j^2$$

$\forall\, \xi \in R^n$ q.d. in $\Omega$, dove le $\lambda_j$ sono funzioni reali non negative di classe $C^1(\Omega)$. Sia $x(t,z,y)$ la soluzione del problema di Cauchy $\dot{x}_j = \lambda_j(x)y_j$, $x_j(o) = z_j$, $j = 1,\dots,n$. E' evidente che, se $|y| \leq c$, $x(\cdot,z,y)$ è una famiglia di curve che soddisfano (2.a), (2.b), (2.c) con $B = B_1^2$, ove $B_1 = (\lambda_j\, \delta_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$.

Osserviamo ora che, se esistono $\alpha_1,\dots,\alpha_n \in R_+$ tali che, $\forall z_0 \in \Omega$ $\exists$ V intorno di $z_0$, $\exists y_0 \in R^n$, C, $\bar{r} \in R+$ tali che

$$\text{(2.2.a)} \qquad x_j(t,z,y) - z_j \geq Ct^{\alpha_j} \quad \forall\, t \in ]\ 0,t_1],$$

$$j = 1,\dots,n,$$

allora (2.c) è soddisfatta con $\alpha = \alpha_1+\dots+\alpha_n$.

Poniamo infatti $y_j = \frac{\partial x}{\partial y_j}$; si ha: $|\det(u_1,\dots,u_n)| = (\det {}^t(u_1,\dots,u_n)(u_1,\dots,u_n))^{1/2} = (\det\, (\langle u_i,u_j\rangle)_{i,j=1,\dots,n})^{1/2}$.

D'altra parte, il k-mo autovalore di $(\langle u_i, u_j\rangle_{i,j=1,\dots,n})$ è uguale a $\min_{\dim V=k} \max_{\xi \in V \cap S^{n-1}} Q(\xi)$, dove $Q(\xi) = \sum_{i,j=1}^{n} \langle u_i, u_j\rangle \xi_i \xi_j =$

$= \left|\frac{\partial}{\partial\lambda} x(t,z,y+\lambda\xi)\Big|_{\lambda=0}\right|^2 = |v|^2$ ed è ben noto che v è la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{v} = C(t)v + B_1(t)\xi \\ v(0) = 0, \end{cases}$$

dove $C(t) = \frac{\partial}{\partial x} B_1(x)y|_{x=x(t,z,y)}$ e $B_1(t) = B_1(x(t,z,y))$.

Ora, se $U(t)$ è l'operatore di evoluzione associato a $C(t)$, $v(t) = U(t)\int_0^t U^{-1}(s)\, B_1(s)\xi\, ds$ e, per le nostre ipotesi, si può supporre sempre $C_1^{-1} \leq |U(s)| \leq C_1$, $C_1^{-1} \leq |U^{-1}(s)| \leq C_1$,
$|(U(s)^{-1})'| \leq C_1 \quad \forall s \in [0,t_0], \quad \forall z \in V, \quad \forall y \in B(y_0,\bar{r})$.

Dunque

$$|v(t)| \geq C_1^{-1}\left|\int_0^t U^{-1}(s)\, B_1(s)\xi\, ds\right| \geq C_1^{-1}\Big(\Big|U^{-1}(t)\int_0^t B_1(s)\xi\, ds\Big| -$$

$$- \Big|\int_0^t (U^{-1}(s))'\Big(\int_0^s B_1(\sigma)\,\xi\, d\sigma\Big)\, ds\Big|\Big) \geq$$

$$\geq C_1^{-1}\Big(C_1^{-1}\Big|\int_0^t B_1(s)\,\xi\, ds\Big| - C_1\int_0^t\Big|\int_0^t B_1(\sigma)\,\xi\, d\sigma\Big|\,ds\Big).$$

Se proviamo allora che, per t abbastanza vicino a zero e $\forall (z,y) \in V \times B(y_0,\bar{r})$

$$\text{(2.2.b)} \qquad \int_0^t \Big|\int_0^t B_1(\sigma)\,\xi\, d\sigma\Big|\, ds \geq (2C_1^2)^{-1}\Big|\int_0^t B_1(s)\,\xi\, ds\Big|,$$

si può concludere che $|v(t)| \geq C_2|(\int_0^t B_1(s)\,ds)\xi|$ e dunque che il k-mo autovalore di $(\langle u_i,u_j\rangle\ i,j = 1,\dots,n)$ è minorato, a meno di una costante, del k-mo autovalore di $\int_0^t B_1(s)ds$ che è $\int_0^t \lambda_j(x(s,z,y))ds =$ $= x_j(t,z,y) - z_j \geq c\, t^{\alpha_j}$. D'altra parte,

$$\int_0^t |(\int_0^s B(\sigma)d\sigma)\,\xi|\,ds \leq \sum_{j=1}^n \int_0^t (\int_0^s \lambda_j(x(\sigma,z,y))\,d\sigma)|\xi_j| \leq$$

$$\leq t \sum_{j=1}^n (\int_0^t \lambda_j(x(\sigma,z,y))\,d\sigma)|\xi_j| \leq C_3 t\, |(\int_0^t B(\sigma)\,d\sigma)\,\xi|,$$

e dunque (2.2.b) è provata.

Esempio 2.3. Consideriamo, in un intorno dell'origine in $R^2$, l'operatore L la cui forma quadratica sia

$$\xi_1^2 + |f(x_1, x_2)|^{2\gamma}\,\xi_2^2\,,$$

dove $\gamma > 1$, $f \in C^{m+1}$, $f(0) = \partial_1 f(0) = \dots = \partial_1^{(m-1)} f(0) = 0$. e $(\partial_1^{(m)} f)(0) \neq 0$. Proviamo che la matrice $B = B_1^2$, ove

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & |f(x_1,x_2)|^{\alpha} \end{pmatrix} = B_1$$

definisce una struttura $(m\gamma+2)$-sub-riemanniana in un intorno dell'origine. Sia $x(t,z,y)$ la soluzione del problema di Cauchy

$$\dot{x} = B_1(x)y\ , \quad x(o) = z_j\ ;$$

si ha

(2.3.a) è verificata (2.2.a).

L'affermazione è ovvia per $j = 1$, con $\alpha_1 = 1$. Poniamo $w = x_2 - z_2$ ; si ha, se $B(y_o, \bar{r}) \subseteq R_+ \times R_+$

$\dot{\omega}(t) = |f(z_1+ty_1, \omega+z_2)|^\gamma y_2 \geq c_1(\gamma)| \sum_{j=0}^{m} (\partial_1^j f)(z) \cdot (ty_1)^j/j!|^\gamma - c_2(\gamma)(\omega + t^{(m+1)\gamma})$. Integrando e tenendo conto che

$\omega(s) \leq \omega(t)$ se $s \leq t$, si ha allora

$$\omega(t) \geq c_3 \int_o^t | \sum_{j=0}^{m} (\partial_1^j f)(z)(sy_2)^j/j!|^\gamma ds - C_4\, t^{(m+1)\gamma+1} =$$

$$= c_4\, t^{m\gamma+1} \int_o^1 | \sum_{j=0}^{m-1} (\partial_1^j f)(z)(sy_1)^k\, t^{k-m}/j! +$$

$$+ (\partial_1^m f)(z)s^m/m!|^\gamma ds - C_6 t^\gamma) \geq c_7\, t^{m+1}, \text{ se } t \leq t_o,$$

$t_o$ opportuno e $0 < c_o \leq \phi^{(m)}(z) \leq C_o$ in $V$, perché $\int_o^1 | \sum_{k=0}^{m-1} \xi_k\, \sigma^k + \xi_m\, s^m|^\gamma ds$ è inferiormente limitato da una costante positiva se $\xi_m$ è lontano da zero e limitato.

Inoltre

(2.3.b) l'applicazione $y \to x(t,z,y)$ è iniettiva in $B(y_o, \bar{r})$.

Infatti $\frac{\partial x_j}{\partial y_j}$ è sempre positiva: la cosa è ovvia se $j = 1$, mentre se $j = 2$ l'affermazione discende dal fatto che $\frac{\partial x_2}{\partial y_2}$ è soluzione di un problema di Cauchy lineare non omogeneo con termine noto $|f(x(t,z,y))|^\gamma$ che è positivo per $t > 0$ a causa di (2.3.a).

Esempio 2.4. Si può verificare ([5]) che la matrice ($\gamma \geq 1$)

$$B(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & |x_1|^{2\gamma} & |x_1|^{\gamma} \\ 0 & |x_1|^{\gamma} & 1 \end{pmatrix}$$

definisce una struttura $(3+2\gamma)$-sub-riemanniana in $R^3$; ciò si applica allo operatore $L = \partial_1^2 + (|x_1|^{\gamma}\partial_2 + \partial_3)^2$. Osserviamo che il più piccolo autovalore di B è identicamente uguale a zero.

3. Proviamo, ad esempio, che, se (2.d) è soddisfatta, allora sussiste (1.b).

Per ogni $t \in [0,t_0]$, poniamo:

$$u(z,t) = \int_{B(y_0,\bar{r})} dy \; u(x(t,z,y))K(y),$$

dove $K \in C_0^{\infty}(B(y_0,\bar{r}))$, $K \geq 0$, $\int dy\, K = 1$. Poiché, evidentemente, $u(z,0) = u(z)$, si può scrivere, $\forall z \in V$

$$u(z) = u(z,t_0) - \int_0^{t_0} dt \int dy \langle \dot{x}(t,z,y), \nabla u(x(t,z,y))\rangle K(y) = I_1 + I_2.$$

Stimiamo la norma di $I_2$. Si ha, se $2 < p < 2\alpha/(\alpha-2)$,

$$\|I_2; L^p(V)\| \leq$$

$$\leq \int_0^{t_0} dt \left( \int_V dz \left( \int dy |\langle \dot{x}(t,z,y), \nabla u(x(t,z,y))\rangle| K(y) \right)^p \right)^{1/p} \leq$$

$$\leq \int_0^{t_0} dt \left( \int_V dz \left( \int dy \langle (A\nabla u)(x(t,z,y)), \nabla u(x(t,z,y))\rangle^{1/2} K(y) \right)^p \right)^{1/p} = \int_0^{t_0} dt\, I_3.$$

Poniamo ora $x(t,z,y) = y'$ (il che è possibile per (2.a), (2.b) e (2.c)), $B(y_0,\bar{r}) = S$ e $\phi(t,z,\cdot) = (x(t,z,\cdot))^{-1}$; si ha:

$$I_3 = \left(\int_V dz \left(\int_{x(t,z,S)} dy' \langle A\nabla u(y'), \nabla u(y')\rangle^{1/2} K(\phi(t,z,y')) \cdot \right.\right.$$

$$\left.\left. \cdot \left|\det \frac{\partial x}{\partial y}(t,z,\phi(t,z,y'))\right|^{-1}\right)^P\right)^{1/p}.$$

Poniamo poi $q = (1/p + 1/2)^{-1}$; osserviamo che risulta:

(3.a)
$$\int_{R^n} dy' \, K^q(\phi(t,z,y'))\left|\det \frac{\partial x}{\partial y}(t,z,\phi(t,z,y'))\right|^{-q} \leq$$
$$\leq c\, t^{\alpha(1-q)} \quad \text{q.d. per } z \in V$$

e

(3.b)
$$\int_V dz \, K^q(\phi(t,z,y'))\left|\det \frac{\partial x}{\partial y}(t,z,\phi(t,z,y'))\right|^{-q} \leq$$
$$\leq c\, t^{\alpha(1-q)} \quad \text{q.d. per } y' \in R^n$$

(si può sempre pensare di aver prolungato $K(\phi(t,z,\cdot))$ con zero fuori di $x(t,z,S)$). Infatti, l'integrale in (3.a) è uguale a

$$\int_S dy \, K^q(y)\left|\det \frac{\partial x}{\partial y}(t,z,y)\right|^{1-q} \geq$$

(a causa di (2.c), dal momento che $q > 1$)

$$\leq C_1\, t^{\alpha(1-q)} \int_S dy \, K^q(y) = C_2\, t^{\alpha(1-q)}.$$

Analogamente può essere provata la (3.b). Ora (3.a) e (3.b) permettono di applicare una diseguaglianza di Young generalizzata ([15], Teorema

4.1.2)

$$I_3 \leqq C_3\, t^{\alpha(1-q)/q} \left(\int_\Omega dy \,\langle (A\nabla u)(y),\, \nabla u(y)\rangle\right)^{1/2},$$

e dunque $\int_0^t dt\, I_3 \leqq C_4 \left(\int_\Omega dy \langle (A\,\nabla u)(y),\, \nabla u(y)\rangle\right)^{1/2}$,

poiché $\alpha(1-q)/q = \alpha(1/p - 1/2) > -1$.

La stima di $I_1$ è poi analoga.

La prova di (1.c) è tecnicamente più delicata; in sostanza, osservato che $\left(\int_{B(\bar{x},\rho)} dx |u-u_\rho|\right)^2 \leqq \int_{B(\bar{x},\rho)\times B(\bar{x},\rho)} dx\, dz |u(x) - u(z)|^2$, si riduce questo integrale su $B(\bar{x}, \rho) \times B(\bar{x},\rho)$ ad un integrale su $B(\bar{x}, \rho) \times B(\bar{\xi}, \rho)$, dove $\bar{\xi}$ è scelto in modo che i fasci di curve $x(\cdot, \xi, y)$ uscenti da un punto $\xi \in B(\bar{\xi},\rho)$ coprano, al variare di $y \in B(y_0, \bar{r})$, tutta la sfera $B(\bar{x},\rho)$. Succevvisamente si esprime $u(x)-u(z)$ tramite un integrale sulle curve sub-unitarie e si integra prima su $B(\bar{x},\rho)$ e poi su $B(\bar{\xi},\rho)$ o viceversa a seconda che t sia lontano o vicino a zero (si veda [7]).

APPENDICE A. Supponiamo verificate (1.b) e (1.c); con il procedimento iterativo di Moser modificato si prova che, se u è una soluzione debole di $Lu = 0$, $u > 0$, allora, fissato $\bar{x} \in \Omega$, esistono $R_0 > 0$, $\beta > 0$, $C_{R_0} > 0$ (indipendenti da u) tali che
$\forall p \in ]-1, 1[$, $\forall r, \rho, R > 0$, $R|2 < \rho < r < R \leq R_0$, si ha:

$$\text{(A.1)} \qquad \sup_{B(\bar{x},\rho)} u^p \leq C_{R_0} (r-\rho)^{-\beta} \int_{B(\bar{x},r)} u^p \, dx.$$

Inoltre, sempre con la stessa tecnica, si può provare che, se $\eta \in C_0^1(\Omega)$, allora, posto $v = \log u$

$$\text{(A.2)} \qquad \int_{R^n} dx\, \eta^2 < A\nabla v, \nabla v > \leq C \int_{R^n} dx\, (< A\nabla\eta, \nabla\eta > + \eta^2).$$

Sia allora $\rho_0$ la costante di (1.c), e sia $\eta \equiv 1$ su $B(\bar{x}, \rho_0)$, $0 \leq \eta \leq 1$, supp $\eta \subseteq B(\bar{x}, 2\rho_0)$. Indichiamo con $Q^-(s)$ l'insieme $\{x \in B(\bar{x},r);\ \log u < -s + v_r\}$. Si ha allora, $\forall s > 0$, $\forall r \in ]0, \rho_1[$:

$$s\mu(Q^-(s)) \leq \int_{Q^-(s)} dx\, (v_r - v) \leq \int_{B(\bar{x},r)} dx |v - v_r| \leq$$

$$\text{(per (1.C))}\ C \int_{B(\bar{x},r)} dx < A\nabla v, \nabla v > \leq C \int_{R^n} dx\, \eta^2 < A\nabla v, \nabla v > \leq$$

$$\text{(per (A.2))}\ C_1 \int_{R^n} dx (< A\nabla\eta, \nabla\eta > + \eta^2) = C_2(\rho_0).$$

Dunque $\exists\ C_3 = C_3(\rho_0)$ tale che, $\forall\ r \leq \rho_1$, si ha:

$$\text{(A.3)} \qquad \mu(\{x \in B(\bar{x},r);\ \log u < -s + v_r\}) \leq C_3\, s^{-1}$$

e, analogamente

$$\text{(A.4)} \qquad \mu(\{x \in B(\bar{x},r);\ \log u > v_r + s\}) \leq C_3\, s^{-1}.$$

La diseguaglianza di Harnack per la sfera $B(\bar{x}, r)$ segue allora da (A.1), (A.3) e (A.4) grazie al seguente lemma di Bombieri-Moser ([13], Lemma 3).

<u>Lemma</u>. Sia $\{Q(t),\ t \in [1/2, 1]\}$ una famiglia di sottoinsiemi misurabili di $R^n$ tali che $Q(\tau) \subseteq Q(t)$ se $\tau \leq t$, e sia $w: Q(1) \to R$ una funzione misurabile e positiva tale che:

i) $$\sup_{Q(\tau)} w^p \leq C_o (t-\tau)^{-\beta} \mu(Q(1))^{-1} \int_{Q(t)} dx\, w^p,$$

$\forall t,\tau,\ 1/2 \leq \tau < t \leq 1, \quad p \in ]\,0,1\,[$

e

ii) $$\mu(\{x \in Q(1);\ \log w > s\}) \leq C_o\, \mu\,(Q(1))\, s^{-1}$$

per convenienti $\beta$ e $C_o \in R_+$. Allora esiste $\gamma = \gamma(\beta, C_o) > 0$ tale che $\sup_{Q(1/2)} w \leq \gamma$.

Basterà infatti scegliere $Q(t) = B(\bar{x}, 2t\,R)$ e $w = \exp(-v_r)u$ e $\exp(v_r)u^{-1}$, successivamente. L'estensione poi al caso di un compatto K qualsiasi è classica.

BIBLIOGRAFIA

[1] J.M. BONY - Principe de maximum, inégalité de Harnack et unicité du problème de Cauchy pour les opérateurs elliptiques dégénérés, Ann. Inst. Fourier 19 (1969), 277-304.

[2] D.E. EDMUNDS e L.A. PELETIER, A Harnack Inequality of Weak Solutions of Degenerate Quasilinear Elliptic Equations, J. London Math. Soc. (2), 5 (1972), 21-31.

[3] E.B. FABES, C.E. KENIG, R.P. SERAPIONI, The Local Regularity of Solutions of Degenerate Elliptic Equations, Comm. P.D.E., 7 (1982), 77-116.

[4] C. FEFFERMAN e D.H. PHONG, Subelliptic Eingevalue Problems, Conference on Harmonic Analysis (Chicago 1981), W. Beckner e al. ed, Wadsworth (1981), 590-606.

[5] B. FRANCHI, Proprietés des courbes intégrales de champs de vecteurs et estimations ponctuelles d'equations elliptiques dégénérées, Séminaire Goulaouic - Meyer - Schwartz (1983/4), Exposé n. 3.

[6] B. FRANCHI e E. LANCONELLI, Stime sub-ellittiche e metriche riemanniane singolari, I e II, Seminario di Analisi Matematica dell'Università di Bologna, 1982/3.

[7] B. FRANCHI e E. LANCONELLI, Une condition geométrique pour l'inégalité de Harnack, J. Math. Pures et Appl., in corso di stampa.

[8] B. GAVEAU, Principe de moindre action, propagation de la chaleur et estimées sons elliptiques sur certains groupes nilpotents, Acta Math., 139 (1977), 95-153.

[9] I.M. KOLODII - Qualitative Properties of the Generalized Solutions of Degenerate Elliptic Equations, Ukrain. Mat. Z., 27 (1975), 320-328 = Ukrainian Math. J., 27 (1975) 256-263.

[10] S.N. KRUZKOV, Certain Properties of Solutions to Elliptic Equations, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 150 (1963), 270-473 = Soviet Math., 4 (1963), 686-690.

[11] J. MOSER, A New Proof of De Giorgi's Theorem Concerning the Regularity Problem of Elliptic Differential Equations, Comm. Pure Appl. Math., 13 (1960), 457-468.

[12] J. MOSER, On Harnack's Theorem for Elliptic Differential Equations, Comm. Pure Appl. Math., 14 (1961), 577-591.

[13] J. MOSER, On a Pointwise Estimate for Parabolic Differential Equations, Comm. Pure Appl. Math., 24 (1971), 727-740,

[14] M.K.V. MURTHY e G. STAMPACCHIA, Boundary Value Problems for Some Degenerate-Elliptic Operators, Ann. Mat. Pura Appl., 80 (4) (1968), 1-122.

[15] G.O. OKIKIOLU, Aspects of the Theory of Bounded Integral Operators in $L^p$-Spaces, Academic Press, London-New York, 1971.